NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA:

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	CARRERA:
Firma		

<u>**Instrucciones**</u>:

- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serÃ¡n corregidas.
- Recuerde que debe realizar su prueba en **SU** sección.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables
- Apagar y guardar sus celulares.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$.

Duración= 60 minutos

CORRECCIóN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) Considere el sistema de ecuaciones con variables x, y, z:

$$\left.\begin{array}{l} kx+y+z=2k-1 \\ x+ky+z=k^2 \\ x+y+kz=3-2k \end{array}\right|$$

Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema

a) **[7 pt]** Tenga única solución.

b) **[10 pt]** Tenga infinitas soluciones y para ese valor de k entregue la solución general y dos soluciones particulares.

c) **[8 pt]** No tenga solución.

Solucion:

Escalonado el sistema tenemos que :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3-2k \\ 1 & k & 1 & k^2 \\ k & 1 & 1 & 2k-1 \end{array}\right) \underset{E_{13}(-k)}{\xrightarrow{E_{12}(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3-2k \\ 0 & k-1 & 1-k & k^2+2k-3 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 2k^2-k-1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}(1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3-2k \\ 0 & k-1 & 1-k & (k-1)(k+3) \\ 0 & 0 & \underbrace{-k^2-k+2}_{-(k+2)(k-1)} & \underbrace{3k^2+k-4}_{(3k+4)(k-1)} \end{array}\right)$$

Luego

a) Solución única para $k \neq -2, 1$

7 puntos

b) Infinitas soluciones para $k = 1$.

2 puntos

Para este caso tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así $z = 1-x-y$. Por lo que la solución general es: $(x, y, 1-x-y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

4 puntos

Dos soluciones pueden ser $(0,0,1)$, $(0,1,0)$.

4 puntos

c) Sin solución para $k = -2$.

8 puntos

2) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuestas en ambos casos.

a) [**7 pt**] Sea A una matriz de orden n y $p(x) = x^3 + 1$, tal que $P(A) = 0$, entonces $A^{10} = A$

b) [**8 pt**] El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ es -27.

Solución:

a) Como $A^3 + I = 0$ tenemos que $A^3 = -I$. Así

$$\begin{aligned} A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 &= -I \cdot -I \cdot -I \\ A^9 &= -I \quad / \cdot A \\ A^{10} &= -A \end{aligned}$$

5 puntos

Luego la afirmación es **FALSA**.

2 puntos

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & -3 & -1 \\ 0 & 16 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 & -3 \\ -8 & -3 & -1 \\ 16 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -27$$

5 puntos

Luego la afirmación es **VERDADERA**.

3 puntos

3) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) **[7 pt]** Calcule $[2B - (A^{-1})^t]^{-1}$

b) **[13 pt]** Encuentre explícitamente la matriz $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en la ecuación:

$$(A^{-1}X^t)^{-1} + (2A^tB)^t - 2(A^tX^{-1})^t = I_2$$

Solución:

a)
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
- $(A^{-1})^t = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
- $2B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

2 puntos

Luego

$$2B - (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\left[2B - (A^{-1})^t\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/11 & 2/55 \\ -1/11 & 9/55 \end{pmatrix}$$

5 puntos

$$\begin{array}{rcll}
(A^{-1}X^t)^{-1} + (2A^tB)^t - 2(A^tX^{-1})^t & = & I_2 & \\
\underbrace{(X^t)^{-1}A} + 2B^tA - \underbrace{2(X^{-1})^tA} & = & I_2 & \text{4 puntos} \\
2B^tA - I_2 & = & (X^{-1})^tA & / \cdot A^{-1} \text{ por derecha} \\
2B^t - A^{-1} & = & (X^{-1})^t & \\
(2B^t - A^{-1})^t & = & X^{-1} & \text{4 puntos} \\
2B - (A^{-1})^t & = & X^{-1} & \\
\left[2B - (A^{-1})^t\right]^{-1} & = & X & \text{4 puntos}
\end{array}$$

Así

$$X = \begin{pmatrix} 1/11 & 2/55 \\ -1/11 & 9/55 \end{pmatrix}$$

b) 1 puntos